ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ:

Αν G αβελιανή έχουμε $Z(G)=G$

$Z(O)=\{a: ab=ba \ \forall b\in O\}$ O ομάδα

$Z(O)\leq O$ $\quad O$ αβελιανή $\Leftrightarrow Z(O)=O$

Αν $a\in Z(O) \Rightarrow ab=ba \Rightarrow a=bab^{-1}$ $\longrightarrow$ συζυγές στοιχείο του a

Μελετούμε τη σχέση εκτός $Z(O)$, $\boxed{a=bab^{-1}}$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω $a\in O$ τυχόν

με $Z(a)=\{b\mid ba=ab\}$ τότε το bab^{-1}, $\forall b\in O$

καλείται συζυγές στοιχείο του a και

το $Z(a)=\{b\mid ba=ab\}$ καλείται κεντροποιητής του a

ΠΡΟΤΑΣΗ: 1) $Z(a)\leq O$

2) $Z(O)\leq Z(a)$, $\forall a\in O$

3) O αβελιανή $\Rightarrow Z(O)=O$

$$Z(O)=\bigcap_{a\in O} Z(a)$$

π.χ.

$\Sigma_3=\{e, f, f^2, fg, f^2g\}=P_3$

$Z(g)=\{e, g\}$

$Z(f)=\{1, f, f^2\}$

$Z(\Sigma_3)=Z(g)\cap Z(f)=\{e\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω a, b τυχαία στοιχεία της O

Αν $\exists c\in O: a=cbc^{-1}$, τότε τα a, b καλούνται συζυγή.

Η σχέση συζυγίας είναι σχέση ισοδυναμίας

Οπότε με $\bar{a}$ συμβολίζουμε την κλάση συζυγίας ή ισοδυναμίας του a
$\bar{a} = \{ cac^{-1} / \forall c \in O \}$

ΠΧ
$\Sigma 3 = \{e, f, f^2, g, fg, f^2 g\}$

$\bar{f} = \{ f,\ f f f^{-1} = f f f^2 = f,\ f^2 f f = f^2 f f = f,\ g f g = g g f^2 = f^2,$
$fgf(fg)^{-1} = fgfgf^{-1} = fgfgf^2 = g f^2 f g f^2 = f^2 \}$

Άρα
$\bar{f} = \{ f, f^2 \}$

$\bar{g} = \{ g,\ fgf^{-1} = fgf^2 = gf^2f^2 = gf,\ f^2 g (f^2)^{-1} = f^2 g f = g f f = g f^2,$
$fgg(fg)^{-1} = fgf^2 = gf^2f^2 = gf \}$

$\bar{g} = \{ g, gf, gf^2 \}$

$\bar{e} = \{ \bar{e} \}$

Παρατηρούμε ότι $[\Sigma 3 : Z(f)] = \frac{6}{3} = 2 = |\bar{f}| = 2$
Προκύπτει η πρόταση

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω O πεπερασμένη και $a \in O$.
Το πλήθος των διακεκριμένων συζυγών στοιχείων του a δίνεται από το δείκτη $[O : Z(a)] = |\bar{a}|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έστω $bab^{-1} = cac^{-1} \overset{(2)}{\Longrightarrow} c^{-1}ba = ac^{-1}b \Longrightarrow$
$\Longrightarrow c^{-1}ba(c^{-1}b)^{-1} = a$
Θέτουμε $c^{-1}b = d$ από το βήμα (2) έχουμε
$da = ad \Longrightarrow dad^{-1} = a \Longrightarrow d \in Z(a)$. Τα στοιχεία του κεντροποιητή δε δίνουν νέα συζυγή

$c^{-1}b \in \underbrace{Z(a)}_{\leq G} \Leftrightarrow b \in cZ(a)$. Δηλ. τα στοιχεία του ίδιου συμπλόκου δε δίνουν νέα συζυγή
τα σύμπλοκα ως προς το $Z(a)$ έχουν πλήθος όσο δίνει ο δείκτης $[G:Z(a)] = |\bar{a}|$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:
Έστω G διαμερίζεται ως προς τις κλάσεις συζυγίας
Έστω ότι διακεκριμένες κλάσεις συζυγίας στο G έχουν αναπαραστάτες $a_1, a_2, \ldots, a_k$.
Τότε $G = \bar{a}_1 \sqcup \bar{a}_2 \sqcup \ldots \sqcup \bar{a}_k$
Έστω
$\bar{a}_1 = \{e\}$, και $\bar{a}_2 = \{a_2\}$ δηλαδή
$\bar{a}_2 = \{ga_2g^{-1} / \forall g \in G\} \Rightarrow ga_2g^{-1} = a_2 \ \forall g \in G \Rightarrow a_2 \in Z(G)$

$G = \underbrace{\bar{a}_1 \sqcup \bar{a}_2 \sqcup \ldots \sqcup \bar{a}_\ell}_{\text{μονοσύνολα} \Leftrightarrow a_i \in Z(G),\ i=1,\ldots,\ell} \sqcup \bar{a}_{\ell+1} \sqcup \bar{a}_{\ell+2} \ldots \sqcup \bar{a}_k$

$|G| = |\bar{a}_1| + |\bar{a}_2| + \ldots + |\bar{a}_\ell| + |\bar{a}_{\ell+1}| + \ldots + |\bar{a}_k| =$
$= |Z(G)| + [G : Z(a_{\ell+1})] + \ldots + [G : Z(a_k)]$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Σχέση κλάσεων Συζυγίας)
Έστω G πεπερασμένη και $a_1, \ldots, a_k$ αντιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας
Τότε $|G| = |Z(G)| + [G : Z(a_{\ell+1})] + [G : Z(a_k)]$.

ΠΟΡΙΣΜΑ:
1) Αν $(a_1, \ldots, a_k) \in \Sigma_n$ και $\sigma \in \Sigma_n$
$\sigma(a_1, \ldots, a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k))$.
2) κύκλοι ίσου μήκους στη Σ_n είναι συζυγείς μεταξύ τους

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
1) $\sigma(a_1, \ldots, a_k) = (\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k))\sigma$

$a_i \to a_{i+1} \to \sigma(a_{i+1})$

$a_i \to \sigma(a_i) \to \sigma(a_{i+1})$

Εστω $m \notin \{a_1, \dots, a_k\}$

$\sigma(a_1, \dots, a_k)(m) = \sigma(m)$

$(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))\,\sigma(m) = \sigma(m)$

Αρα, $\sigma(a_1, \dots, a_k) = (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k))\sigma$

2) $(a_1, \dots, a_k)$ και $(b_1, \dots, b_k)$

Βρες σ στοιχειο της Σ_n ωστε $\sigma(a_1, \dots, a_k)\sigma^{-1} = (b_1, \dots, b_k) \Rightarrow (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k)) = (b_1, \dots, b_k)$

Ορίζουμε $\sigma(a_i) = b_i$

ΟΡΙΣΜΟΣ Εστω Y υποομαδα της G. Αν $\forall a \in G$ και $g \in Y$ εχουμε $aga^{-1} \in Y$, τοτε η Y κανονική συμβολίζουμε $Y \trianglelefteq G$ κανονική (normal)

Προσοχή: $aga^{-1} \neq g$ οχι απαραίτητα για να 'ναι κανονική

$Y \trianglelefteq G \Rightarrow aga^{-1} = g'$; $aga^{-1} = g \Leftrightarrow ag = ga \Leftrightarrow a \in Z(g)$

ΠΡΟΤΑΣΗ τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1) $Y \trianglelefteq G$

2) $aYa^{-1} \in Y$, $\forall a \in G$

3) $aY = Ya$, $\forall a \in G$.

Πχ

$\Sigma_3 = \{e, f, f^2, g, fg, f^2 g\}$

Ποια είναι κανονική υποομάδα απο τις ανωτερω;

$<f> = \{e, f, f^2\}$	$g<f> = <f>g$ ← πρέπει ναι
$<g> = \{1, g\}$	$fg<f> = <f>fg$
$<fg> = \{1, fg\}$	$f^2g<f> = <f>f^2g$
$<f^2> = \{1, f^2 g\}$	

$g<f> = \{g, gf, gf^2\} = \{g, f^2g, fg\}$ »
$<f>g = \{g, fg, f^2g\}$ κανονική $<f> \triangleleft \Sigma_3$

$f<g> = \{f, fg\}$ ✕ μη κανονική $<g> \ntriangleleft \Sigma_3$
$<g>f = \{f, gf\} = \{f, f^2g\}$

$A_3 = <f> \triangleleft \Sigma_3$

ΠΡΟΤΑΣΗ:
Αν $Y \leq O$ και $[O:Y] = 2 \Rightarrow Y \triangleleft O$
Απόδειξη
$[O:Y] = 2$
$O = Y \sqcup aY$ με $a \notin Y$
$aY = Ya \Rightarrow Y \triangleleft O$
$a \in O = Y \underset{a \notin Y}{\sqcup} Yb \Rightarrow a \in Yb \Rightarrow a = gb \Rightarrow b = g^{-1}a \Rightarrow Yb = Yg^{-1}a =$
$= Ya \Rightarrow \underset{Y \triangleleft O}{Ya = aY}$

ΠΟΡΙΣΜΑ:
$A_n \triangleleft \Sigma_n$, $\forall n \geq 3$

ΠΡΟΤΑΣΗ
Ισχύει: $|aYa^{-1}| = |Y|$

ΠΟΡΙΣΜΑ
Αν $Y \leq O$ και Y μοναδική υποομάδα πλήθους στοιχείων $|Y|$ τότε $Y \triangleleft O$.

Αποδ:
$(\forall a \in O)$ $|aYa^{-1}| = |Y|$, μοναδική $\Rightarrow aYa^{-1} = Y$, $a \in O$

Πχ
O ομάδα $\Longrightarrow <1>, O$ κανονικές

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν μία ομάδα O έχει σαν κανονικές υποομάδες μόνο τις $<1>$ και O, θα καλείται απλή

Πχ

$A_3 \triangleleft \Sigma_3$ έχει μόνο μία απλή μη-τετριμμένη

A_4 άρτιες μεταθέσεις της Σ_4

$|A_4| = 12$

$Y = \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4),(2,3)\} \subseteq A_4$

Y κλειστό ως προς την πράξη : $Y \leq A_4$ με $|Y|=4$

Η Y είναι ισόμορφη η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ από άλλη σκοπιά

Άρτιες μεταθέσεις τάξης 3

$(1,2,3) = (1,2)(1,3) \in A_4$

$(1,2,3), (1,3,2)(1,2,4), (1,4,2)(1,3,4)(1,4,3), (2,3,4)(2,4,3)$

σ τρία κύκλους

$\sigma(\alpha,\beta)(\gamma,\delta)\sigma^{-1} \in Y$ γιατί έχει τάξη 2

Άρα, $Y \triangleleft A_4 \triangleleft \Sigma_4$, $A_4 = Y \sqcup \{$τρικυκλοι$\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Οι εναλλάσσουσες υποομάδες A_n της Σ_n είναι απλές για $n \in \{3,5,6,7,\ldots\}$

Πχ

$\mathbb{Z}$ ομάδα και $k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ αβελιανή $\Rightarrow k\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$

σύμπλοκα της $k\mathbb{Z}$ είναι $n+k\mathbb{Z}$ όπου $n \in \{0,1,\ldots,k-1\}$

$\mathbb{Z} = k\mathbb{Z} \sqcup (1+k\mathbb{Z}) \sqcup (2+k\mathbb{Z}) \sqcup \ldots \sqcup ((k-1)+k\mathbb{Z})$

$\mathbb{Z}_k = \{a+k\mathbb{Z} / a \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} \bmod k$ ορίζονται $\oplus$ και $\odot$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $Y \triangleleft O$ και O/Y συμβολίζουμε το σύνολο συμπλόκων ως προς την Y

$O/Y = \mathbb{Z}_K = \{aY / a \in O\} = \{Ya / a \in O\}$

Μέσω της πράξης της O, το σύνολο O/Y εφοδιάζεται με μία πράξη ως εξής:

$aY \circledast a'Y = aa'Y$, $a, a' \in O$

Είναι Κ.Ο η πράξη;

Είναι δηλ. η πράξη αυτή ανεξάρτητη των αντιπροσώπων που χρησιμοποιούμε.

$\left.\begin{array}{l} aY = bY \\ a'Y = b'Y \end{array}\right\} aa'Y = bb'Y$. Τότε θα είναι καλά ορισμένοι

$aY = bY \Rightarrow b^{-1}a = y_1 \in Y$

$a'Y = b'Y \Rightarrow (b'^{-1})^{-1}aa' = y_2 \in Y$

Θέλουμε $(b \cdot b')^{-1}aa' = y_2 \in Y$ δηλαδή θέλουμε:

$(b')^{-1}b^{-1}aa' = y_2 \in Y$

Έτσι $(b')^{-1}y_1a' \xrightarrow[(3)]{\text{κανονική}} (b')^{-1}a'y_3 \overset{(2)}{=} y_1'y_3 \in Y$

$Y \triangleleft O \Rightarrow (a')^{-1}Ya' = Y \Rightarrow (a')^{-1}y_1a' = y_3 \Rightarrow y_1a' = a'y_3$ (3)

Το σύνολο O/Y καλείται ομάδα πηλίκο με αυτήν την πράξη ως προς Y

ΠΧ

$kℤ \triangleleft ℤ \Rightarrow ℤ/kℤ = ℤ_k$

$ℤ_k$ έχει ουδέτερο $[0]_k = \bar{0} = \{km \,/\, m \in ℤ\}$

Στο $ℤ_k$ το ουδέτερο ίσο με $kℤ$

ΠΧ

O και $Y \triangleleft O \Rightarrow O/Y = \{aY \,/\, a \in O\}$ ουδέτερο είναι το σύμπλοκο Y: $a \cdot Y \odot Y = aY \odot 1Y = a \cdot 1 \cdot Y = aY$

ΠΧ

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ $\quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = k, \; ji = -k$

$|\langle i \rangle| = 4 \Rightarrow |Q_8 : \langle i \rangle| = 2 \Rightarrow \langle i \rangle \triangleleft Q_8$

$|Q_8/\langle i \rangle| = 2 \cdot Q_8/\langle i \rangle = \{\underset{\text{μοναδιαίο}}{\langle i \rangle}, j\langle i \rangle\}$

$<i>\cdot j<i> = j<i>$

$j<i>\cdot j<i> = j^2<i> = (-1)<i> = <i>$

$<-1> = \{1,-1\} \Rightarrow <-1> \triangleleft Q_8 \Rightarrow |Q_8/<-1>| = 4$

$<-1>$

$a \in Q_8 \quad a1a^{-1} = 1 \in <-1> \Rightarrow <-1> \triangleleft Q_8.$

$a(-1)a^{-1} = -1$

Να βρούμε τα σύμπλοκα

$\{\pm 1\}, \; i\{\pm 1\} = \{\pm i\}, \; j\{\pm 1\} = \{\pm j\}, \; k\{\pm 1\} = \{\pm k\}$

$Q_8 = \{\pm 1\} \sqcup i\{\pm 1\} \sqcup j\{\pm 1\} \sqcup k\{\pm 1\}$

$Q_8/<-1> = \{<-1>, i<-1>, j<-1>, k<-1>\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω O αβελιανή (πεπερασμένη) ώστε ο πρώτος p να διαιρεί την τάξη της. Τότε η O έχει υποομάδα τάξης p.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με επαγωγή στην τάξη της O

$|O| = 2$ και 3. Είναι προφανές

$|O| = 4$ τότε είναι σαν την $\mathbb{Z}_4$ ή $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλες τις ομάδες τάξης μικρότερης του n.

Έστω ότι $p / |O| \Rightarrow \exists\, Y < O$ με $|Y| = p$

Έστω $a \in O$ και $a \neq 1$

$<a> \leq O$ Αν $<a> = O \Rightarrow O$ κυκλική ισχύει

Έστω $<a> < O$ ορίζεται η ομάδα πηλίκο $O/<a>$ με $|O/<a>| = \frac{|O|}{|<a>|} < n$

Άρα επειδή αυτή, $O/<a>$ είναι αβελιανή τότε ισχύει η πρόταση

Έστω ο $p \mid |<a>|$ ή $p \mid \frac{|O|}{|<a>|}$

Αν $p \mid |<a>|$ ισχύει από την επαγωγή

Αν $p \mid |O/<a>| \to (\exists$ υποομάδα Y της $O/<a>$ τάξης p

Δηλαδή $|Y| = p \Rightarrow Y$ κυκλική της $O/\langle a \rangle$

Άρα $Y = \langle \underbrace{b\langle a \rangle}_{} \rangle$

στοιχείο και στοιχείο της $O/\langle a \rangle$

$o(b\langle a \rangle) = p \Leftrightarrow (b\langle a \rangle)^p = \langle a \rangle$ ουδέτερο

$b^p \langle a \rangle = \langle a \rangle \Rightarrow b^p \in \langle a \rangle \Rightarrow o(b^p) \mid o(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Άρα θα έχουμε ότι $o(b) = p\lambda \Rightarrow o(b^\lambda) = p \Rightarrow$

$\Rightarrow |\langle b^\lambda \rangle| = p$ και $\langle b^\lambda \rangle \leq O$

<u>Ασκήσεις</u> : σελ. 78 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10